SÉRIES TEMPORELLES. EXAMEN FINAL (2H).
CORRIGÉ (TRÈS) SUCCINCT

(English version on the back of the sheet)

Documents et appareils électroniques non autorisés. Toute réponse doit être justifiée et lisible. La qualité de la rédaction pourra être prise en compte dans la notation. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif. Vous pouvez répondre en français ou en anglais.

Questions de cours. [5pts]

(1) Qu'est-ce que la mesure spectrale associée à un processus stationnaire du second ordre? Si X est un processus stationnaire du second ordre alors d'après le cours sa fonction d'auto-covariance $h \in \mathbb{Z} \mapsto \gamma_X(h)$ est de type positif au sens complexe. D'après le théorème d'Herglotz, les coefficients $\gamma_X(h)$ sont dont les coefficients de Fourier d'une unique mesure positive, finie et paire sur $[-\pi, \pi]$ appelée mesure spectrale du processus.

(2) Donner (sans démonstration) la mesure spectrale associée à un bruit blanc centré et de variance un. $\nu(\mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$ sur $[-\pi, \pi]$.

(3) La mesure spectrale d'un processus possède-t-elle toujours une densité par rapport à la mesure de Lebesgue? Si oui, le prouver. Sinon, donner (sans démonstration) un contre-exemple. Non : par exemple, la mesure spectrale d'un processus harmonique de fréquence $\theta \in [-\pi, \pi]$ est $\frac{1}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$, qui n'a pas de densité par rapport à Lebesgue.

(4) Rappeler la définition du prédicteur progressif d'ordre $p \geq 1$. Si X est un processus stationnaire du second ordre et centré alors le prédicteur progressif d'ordre $p \geq 1$ au temps $t \in \mathbb{Z}$ est le projeté orthogonal de X_t sur $\mathrm{vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$, suivant le produit scalaire dans L^2.

(5) Donner (sans preuve) l'équation de Yule-Walker portant sur les coefficients du prédicteur, en identifiant clairement chaque terme de l'équation. Cette équation s'écrit $\Gamma_p \varphi_p = \gamma_p$ où Γ_p est la matrice $(\gamma_X(k-\ell))_{1 \leq k, \ell \leq p}$, $\varphi_p = (\varphi_{p,k})_{1 \leq k \leq p}$ sont les coefficients associés au prédicteur d'ordre p, et $\gamma_p = (\gamma_X(k))_{1 \leq k \leq p}$.

Exercice. [**15pts**] On considère l'équation suivante, de paramètre $\mathsf{a} \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{a}(\Delta X)_t - (\Delta X)_{t-1} = (\Delta Z)_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où X est un processus stationnaire du second ordre (inconnu), Z est un bruit blanc centré et de variance un (donné), ainsi que

$$(\Delta X)_t := X_t - X_{t-1}, \qquad (\Delta Z)_t := Z_t - Z_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Pour tout processus stationnaire du second ordre $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et tout filtre $\gamma \in \ell_1(\mathbb{Z})$, on rappelle que $F_\gamma(Y)$ est le processus stationnaire du second ordre défini par

$$F_\gamma(Y)_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k Y_{t-k}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

(1) Rappeler la définition d'un bruit blanc centré et de variance un. **[1pt]** $\gamma_Z(h) = \mathbf{1}_{\{h=0\}}$.

(2) Montrer que ΔX et ΔZ sont aussi des processus stationnaires du second ordre. **[1pt]** Dans les deux cas, il s'agit d'un processus obtenu par filtrage polynomial (et donc ℓ_1) d'un processus stationnaire du second ordre.

(3) Le processus ΔZ est-il un bruit blanc? **[1pt]** Non car $\mathrm{Cov}((\Delta Z)_0, (\Delta Z)_1) = -\mathrm{Cov}(Z_0, Z_0) = -1 \neq 0$.

Date: Vendredi 9 janvier 2026.

(4) Mettre l'équation (1) sous la forme $F_\alpha(X) = F_\beta(Z)$ où α et β sont deux filtres polynomiaux à déterminer. Comment s'appelle cette équation ? **[1pt]** L'équation (1) est équivalente à $F_\alpha(X) = F_\beta(Z)$ où
- $\alpha_0 = \mathsf{a}$, $\alpha_1 = -(1+\mathsf{a})$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_k = 0$ sinon;
- $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$ et $\beta_k = 0$ sinon.

Il s'agit d'une équation ARMA(2,1).

(5) Soient Φ et Ψ les polynômes associés à α et β, respectivement. Écrire Φ et Ψ, ainsi que leurs racines. **[1pt]** On a $\Phi(z) = (\mathsf{a} - z)(1 - z)$, de racines a et 1, et $\Psi(z) = 1 - z$, racine 1.

(6) En utilisant un théorème du cours, discuter de l'existence ainsi que du nombre de solutions *stationnaires* de l'équation (1) en fonction du paramètre $\mathsf{a} \in \mathbb{R}$. **[2pts]** Si $|\mathsf{a}| = 1$ alors Φ possède une racine de module un non compensée par Ψ et il n'existe dans ce cas aucune solution stationnaire. Si $|\mathsf{a}| \neq 1$ alors Φ possède une seule racine de module un, qui est compensée par Ψ, et alors il existe une infinité de solutions stationnaires.

(7) Déterminer explicitement l'unique solution *linéaire* de l'équation (1) lorsque $|\mathsf{a}| \neq 1$, ainsi que sa densité spectrale. Écrire et nommer l'équation réduite associée. **[3pts]** Lorsque $|\mathsf{a}| \neq 1$, il y a une unique solution stationnaire linéaire, qui est la solution de l'équation réduite ARMA($\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Psi}$), où $\widetilde{\Phi}(z) = \mathsf{a} - z$ et $\widetilde{\Psi}(z) = 1$. Autrement dit, il s'agit de l'unique solution stationnaire de l'équation $\mathsf{a}X_t - X_{t-1} = Z_t$. Or, pour tout $|z| \leq 1$ (complexe),

$$\frac{1}{\mathsf{a} - z} = \begin{cases} \sum_{k\geq 0} \mathsf{a}^{-(k+1)} z^k & (|\mathsf{a}| > 1) \\ -\sum_{k\geq 0} \mathsf{a}^k z^{-(k+1)} & (|\mathsf{a}| < 1). \end{cases} \tag{4}$$

On en déduit d'après le cours que l'unique solution linéaire est donnée par: $(t \in \mathbb{Z})$

$$X_t = \begin{cases} \sum_{k\geq 0} \mathsf{a}^{-(k+1)} Z_{t-k} & (|\mathsf{a}| > 1) \\ -\sum_{k\geq 0} \mathsf{a}^k Z_{t+k+1} & (|\mathsf{a}| < 1). \end{cases} \tag{5}$$

(8) Dans le cas $|\mathsf{a}| > 1$, montrer que $\mathrm{Cov}(Z_t, X_{t-k}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout entier $k \geq 1$. En déduire le prédicteur progressif d'ordre p de X_t, pour tout entier $p \geq 1$. Calculer l'erreur de prédiction. **[3pts]** Par bilinéarité et continuité (par rapport à la norme L^2) de la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(Z_t, X_{t-k}) = \sum_{i\geq 0} \mathsf{a}^{-(i+1)} \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-k-i}) = 0. \tag{6}$$

En effet, chaque terme est nul car $t - k - i \leq t - 1 < t$ et Z est un bruit blanc. On peut donc écrire (comme $\mathsf{a} \neq 0$)

$$X_t = \frac{X_{t-1}}{\mathsf{a}} + \frac{Z_t}{\mathsf{a}}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

avec $\frac{X_{t-1}}{\mathsf{a}} \in \mathrm{vect}(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})$ et $\frac{Z_t}{\mathsf{a}} \in \mathrm{vect}(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})^\perp$ pour tout $p \geq 1$. On en déduit que le prédicteur recherché est $\frac{X_{t-1}}{\mathsf{a}}$ pour tout $p \geq 1$ et l'erreur de prédiction $\sigma_p = \mathrm{Var}(\frac{Z_t}{\mathsf{a}}) = 1/\mathsf{a}^2$.

(9) Donner un exemple de solution stationnaire *non linéaire* pour l'équation (1). Montrer que la solution proposée n'est pas linéaire en utilisant un argument de votre choix. **[2pts]** Soit X la solution linéaire de l'équation (1) et A une variable aléatoire de carré intégrable, non identiquement nulle, et décorrélée de X. On peut alors montrer que le processus $t \in \mathbb{Z} \mapsto X_t + A$ est stationnaire et solution de l'équation (1). Pour montrer que ce processus n'est pas linéaire, on peut utiliser un argument spectral (sa mesure spectrale possède un atome en 0).

TIME SERIES. FINAL EXAM (2H).

(Version française au dos)

Documents and electronic devices are not allowed. Answers must be justified and readable. The quality of writing may be taken into account in the grading. The marking scheme is provided for guidance only. You may answer in French or English.

Basic notions. [**5pts**]

(1) What is the spectral measure associated to a second-order stationary process?

(2) Give the spectral measure of a white noise with zero mean and unit variance (no proof needed).

(3) Does the spectral measure of a process always have a density with respect to Lebesgue measure? If so, prove it. Otherwise, provide (without proof) a counter-example.

(4) Recall the definition of the progressive predictor of order $p \geq 1$.

(5) Give (without proof) the Yule-Walker equation related to the coefficients of the predictor and clearly identify each term in the equation.

Exercise. [**15pts**] We consider the following equation, with parameter $\mathsf{a} \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{a}(\Delta X)_t - (\Delta X)_{t-1} = (\Delta Z)_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

where X is an (unknown) second-order stationary process, Z is a (given) white noise with zero mean and unit variance, and

$$(\Delta X)_t := X_t - X_{t-1}, \qquad (\Delta Z)_t := Z_t - Z_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

For every second-order stationary process $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and every filter $\gamma \in \ell_1(\mathbb{Z})$, we recall that $F_\gamma(Y)$ is the second-order stationary process defined by

$$F_\gamma(Y)_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k Y_{t-k}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

(1) Recall the definition of a white noise with zero mean and unit variance. [**1pt**]

(2) Show that ΔX and ΔZ are second-order stationary processes as well. [**1pt**]

(3) Is the process ΔZ a white noise? [**1pt**]

(4) Write Equation (8) as $F_\alpha(X) = F_\beta(Z)$ where α and β are polynomial filters to be determined. How is this equation called? [**1pt**]

(5) Let Φ and Ψ be the polynomial functions associated to α and β, respectively. Write Φ and Ψ, as well as their roots. [**1pt**]

(6) By using a theorem seen in class, discuss the existence and the number of *stationary* solutions to Equation (8) depending on the value of the parameter $\mathsf{a} \in \mathbb{R}$. [**2pts**]

(7) Explicitly determine the unique *linear* solution to Equation (8) when $|\mathsf{a}| \neq 1$, as well as its spectral density. Write and name the corresponding reduced equation. [**3pts**]

(8) When $|\mathsf{a}| > 1$, show that $\mathrm{Cov}(Z_t, X_{t-k}) = 0$ for every $t \in \mathbb{Z}$ and every integer $k \geq 1$. Deduce thereof the progressive predictor of order p for X_t, for every integer $p \geq 1$. Compute the prediction error. [**3pts**]

(9) Provide an example of a *non-linear* stationary solution to Equation (8). Show that the provided solution is non-linear by using an argument of your choice. [**2pts**]